Basic elements of probability I: experiments, events, sample points and sample space.

Elementos básicos de probabilidad I: Experimentos, sucesos, puntos muestrales y espacio muestral.

Soto Espinosa Juan Luis [1] https://orcid.org/0000-0003-2600-9292
[1] *Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM*

Dirección (Autor principal): *Batalla de 5 de mayo esquina Fuerte de Loreto, Col. Ejército de Oriente. Alcaldía Iztapalapa, Ciudad de México. México*
Correo electrónico de contacto: *soej@unam.mx*
Palabras clave: Estadística, probabilidad, suceso aleatorio, eventos favorables.

Fecha de envío: 01/02/2022
Fecha de aprobación: 01/04/2022

Cuando se estudian fenómenos o procesos, se toman datos de características de estudio (variables) que presentan diferentes valores en cada uno de los elementos o participantes en el estudio, en otras palabras, cada una de las modalidades de la variable de estudio puede presentarse en uno o varios elementos de la población o muestra. Debido a que el número de veces que un valor se presenta en los individuos de la población o muestra puede ser diferente, dependiendo de, entre otras cosas, el número de elementos, la forma de medición o el mecanismo de selección de los elementos, se dice que existe variabilidad en los fenómenos estudiados.

Para abordar estos estudios, se recurre a la PROBABILIDAD, que definida de forma sencilla es el estudio de la posibilidad de ocurrencia de un valor o evento determinado en el total de sucesos que se consideran en el estudio.

En esta entrega se abordan algunos conceptos básicos de probabilidad, desde su definición, propiedades y axiomas, con el fin de brindar un marco conceptual que permita iniciar al lector en la estadística inferencial.

Iniciemos definiendo algunos conceptos importantes:

Probabilidad: es una medida de qué tan posible es que se de un resultado determinado en un evento que puede presentar varios resultados, por ejemplo, tirar un dado que tiene diferentes valores representados por puntos en cada una de sus caras. Si uno tira el dado, puede obtener como resultado del evento, un valor entre uno y seis en la cara superior.

La probabilidad se entiende entonces como el nivel de certeza que se tiene acerca de la ocurrencia de cierto resultado de entre un número conocido de resultados posibles.

Si se parte del supuesto de que un evento puede tener varios resultados posibles, se dice que existe variabilidad en el resultado y cierto grado de incertidumbre en el evento.

Desde un punto de vista estadístico, dado un evento aleatorio (con varios resultados posibles), se denomina probabilidad a una función matemática que asigna a cada suceso un valor que refleja la posibilidad de ocurrencia del resultado esperado.

Conocer la probabilidad de ocurrencia de un resultado es de suma importancia en todo estudio estadístico. Si se conocen los posibles resultados de un fenómeno, es posible determinar las reglas de estudio de un experimento aleatorio y es posible calcular las probabilidades asociadas al mismo.

Si los resultados de un experimento (sucesos) obedecen al azar, se denominan ESTOCÁSTICOS o ALEATORIOS.

Se llaman experimentos ya que, de acuerdo con la definición de Babbie (2014) es una "acción realizada bajo ciertas condiciones para estudiar el efecto o consecuencias que tiene en el fenómeno observado. Antes de él, Badii y sus colaboradores (2007) puntualizan que un experimento es un procedimiento que, basado en el control de las condiciones, permite verificar, apoyar, rechazar o modificar una hipótesis. Montgomery (1993), por otra parte, define experimento como "... una prueba o ensayo," (p.1) en la que es posible manipular deliberadamente una o más variables independientes para observar los cambios en la variable dependiente en una situación o contexto estrictamente controlado por el investigador.

Para que un evento o experimento se considere aleatorio, deben cumplirse tres condiciones:

1) El experimento puede repetirse infinidad de veces bajo las mismas condiciones.
2) Antes de llevar a cabo el experimento, no se puede predecir con certeza el resultado que se va a obtener.
3) El resultado obtenido pertenece a un conjunto conocido de resultados posibles, que constituyen el espacio muestral del experimento.

Si alguna de las condiciones mencionadas no se cumple, el experimento no se considera aleatorio.

Espacio muestral

A todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se le denomina ESPACIO MUESTRAL, comúnmente se le representa con la letra griega omega (W). Para enumerar los elementos de un espacio muestral, se utilizan las llaves {}. Retomando los ejemplos anteriores, el espacio muestral de tirar una moneda será águila o sol (cara o cruz en otros países) y se representa {águila, sol} ({cara, cruz}).

El subconjunto de resultados que es posible obtener en un experimento se llama eventos o sucesos. Un espacio muestral puede contener un número de resultados que depende del experimento.

Si contiene un número **finito *enumerable*** de resultados, entonces se conoce como *espacio muestral discreto finito*; si presenta un número **finito** de resultados pero ***resulta imposible enumerarlos***, se conoce como *espacio muestral discreto infinito*; si el espacio muestral presenta un número **infinito** de resultados posibles, se conoce como *espacio muestral continuo* o *infinito*.

Sucesos o experimentos estocásticos:

Se denomina experimento estocástico, aleatorio o estadístico al evento que puede producir resultados diferentes bajo las mismas condiciones. Los ejemplos más comunes de experimentos aleatorios son tirar una moneda o un dado (Figura 1).

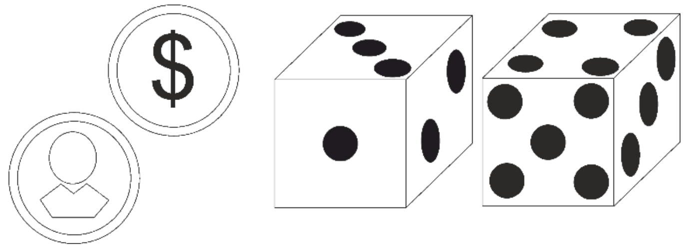

Figura 1. Ejemplos de suceso aleatorio

Otros ejemplos de sucesos aleatorios son, por ejemplo, que al tomar un trabajador de una empresa, este padezca Síndrome de Burnout, o bien, que Un conjunto de trabajadores de una empresa que participan en un estudio, presenten niveles elevados de cortisol.

Se llama SUCESO a cualquier conjunto de resultados que es posible obtener en un experimento. En los SUCESOS ALEATORIOS, se desconoce de antemano el resultado que se va a obtener, ya que este está relacionado con el azar.

Si se tiene un fenómeno cuyo resultado se conoce de antemano, se denomina SUCESO DETERMINISTA.

El propósito de la estadística es estudiar los fenómenos aleatorios y determinar la probabilidad de ocurrencia de sus posibles resultados.

Existen varios tipos de SUCESOS:

- SUCESO SIMPLE: Es aquel suceso que está formado por un único resultado.
- SUCESO COMPUESTO: Es aquel suceso que está constituido por dos o más resultados..
- SUCESO SEGURO: Es aquel suceso que está conformado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio y coincide con el espacio muestral del fenómeno estudiado. En el caso de tirar un dado, el suceso seguro es igual al espacio muestral
- SUCESO IMPOSIBLE: Es aquel suceso cuyo resultado nunca se presenta o verifica, cuando un proceso imposible tiene lugar, se representa con el símbolo $\emptyset$ (conjunto vacío).

Rev. Red Inv. Sal. Trab. Vol. 5 Número 8 Año (2022) ISSN 2594-0988

Para representar el ESPACIO MUESTRAL y los SUCESOS, se utiliza notación de CONJUNTOS, para lo cual se propone el siguiente ejemplo:

Considere un experimento que consiste en tirar un dado para ver qué puntaje se obtiene en la cara superior.

Para el caso de tirar un dado, el espacio muestral estará dado por los posibles resultados que se pueden obtener, que para un dado común son 1,2,3,4,5 y 6. En este caso el ESPACIO MUESTRAL del experimento TIRAR UN DADO se representa:

S = {1,2,3,4,5,6}

Dónde:

S = Espacio muestral

Cada acción de tirar el dado constituye un EVENTO o SUCESO, que se representa utilizando letra mayúsculas A, B ,C,…

Los sucesos son subconjuntos del espacio muestra S, es decir, los resultados obtenidos en cada evento están contenidos en el espacio muestral, lo que matemáticamente se representa:

$$A, B, C \in S$$

Recuerde que el símbolo v se lee como “pertenece a”, por lo que la expresión anterior se lee “Sucesos A, B y C pertenecen al espacio muestral S”.

Los sucesos aleatorios son conjuntos que pueden contener un solo elemento, algunos elementos, una infinidad de elementos, y también no contener ningún elemento, es decir, representar un conjunto vacío.

Al número de puntos muestrales (elementos que conforman el espacio muestral) de S se le representa por N(S)

En el caso del ESPACIO MUESTRAL del experimento TIRAR UN DADO, tenemos 6 (seis) puntos muestrales, lo que se denota:

N(A) = 6   ya que los resultados posibles son

A = {1,2,3,4,5,6}

Nótese que cada elemento del espacio muestral representa un SUCESO SIMPLE O SUCESO ELEMENTAL, que puede representarse de manera independiente como:

A = Obtener 1 punto

B = Obtener 2 puntos

C = Obtener 3 puntos

D = Obtener 4 puntos

E = Obtener 5 puntos

F = Obtener 6 puntos

En donde

$$A, B, C, D, E, F \in S$$

Retomando el ejemplo en el experimento TIRAR UN DADO, donde

A = TIRAR UN DADO

Tenemos que:

N(A) = 6   Donde   A = {1,2,3,4,5,6}

que comparado con el espacio muestral:

N(S) = 6   Donde S= {1,2,3,4,5,6}

Resulta que:

N(A) = N(S)

A = S

Debido a que el número de puntos muestrales es igual al espacio muestral, se presenta un EVENTO SEGURO O SUCESO SEGURO.

Continuando con el ejemplo del dado, en el experimento OBTENER UN NÚMERO PAR AL TIRAR UN DADO, tenemos

A = OBTENER UN NÚMERO PAR AL TIRAR UN DADO

N(A) = 3   ya que A = {2,4,6}

En este caso tenemos que el resultado está constituido por más de un elemento del espacio muestral, por lo que representa un SUCESO COMPUESTO.

En el experimento OBTENER 7 PUNTOS AL TIRAR UN DADO se tiene que.

A = OBTENER 7 PUNTOS AL TIRAR UN DADO

N(A) = 0   Donde   A = {∅}

El resultado es un conjunto vacío ya que 7 puntos es un valor imposible de obtener al tirar un dado tradicional cuyas caras presentan 1, 2, 3, 4 ,5 y 6 puntos respectivamente en cada cara.

En este caso tenemos un SUCESO IMPOSIBLE.

A continuación, se analiza el experimento de TIRAR DOS MONEDAS AL AIRE con el objeto de determinar el espacio muestral.

A = TIRAR UNA MONEDA

N(A) = 2   A= {ÁGUILA, SOL}

Si se tiene una segunda moneda, su espacio muestral será:

B = TIRAR UNA MONEDA

N(B) = 2   B = {ÁGUILA, SOL}

Para obtener el espacio muestral del experimento TIRAR DOS MONEDAS AL AIRE, se realizan todas las combinaciones posibles entre los elementos de los dos espacios muestrales, de donde se obtiene lo siguiente:

A x B = {águila, sol} x {ÁGUILA, SOL}

A x B = {águila, ÁGUILA} {águila, SOL} {sol, ÁGUILA} {sol, SOL}

Como resultado, se obtienen todas las parejas de resultados posibles entre los elementos de los espacios muestrales. En este caso, como cada uno de los espacios muestrales tienen dos puntos muestrales, los puntos correspondientes al producto son:

N(A) x N(B) = 2 x 2 = 4 puntos muestrales

Que corresponden al total de combinaciones posibles entre los resultados.

Si el experimento fuese TIRAR TRES MONEDAS, el número de puntos muestrales sería:

N(A) x N(B) x N(C) = 2 x 2 x 2 = 8 puntos muestrales

Representados de forma explícita se tendrá:

A = TIRAR UNA MONEDA

N(A) = 2   C= {ÁGUILA, SOL}

B = TIRAR UNA MONEDA

N(B) = 2   C= {ÁGUILA, SOL}

C = TIRAR UNA MONEDA

N(C) = 2   C= {ÁGUILA, SOL}

EL ESPACIO MUESTRAL ESTÁ DADO POR

N(A) X N(B) X N(C) = 2 X 2 X 2 = 8 PUNTOS MUESTRALES

De forma explícita se tendrá:

N(A) x N(B) x N(C) = {S,S,S), (S,S,A), (S,A,S), (A,S,S), (A,A,S), (A,S,A), (S,A,A), (A,A,A)}

Si representamos como D el experimento TIRAR TRES MONEDAS AL AIRE la notación queda:

N(D) = 8

D = {S,S,S), (S,S,A), (S,A,S), (A,S,S), (A,A,S), (A,S,A), (S,A,A), (A,A,A)}

Donde:

S = Sol

A = Águila

Un ejemplo de EVENTO SIMPLE es:

E= QUE AL TIRAR TRES MONEDAS CAIGAN 3 ÁGUILAS

N(E) = 1

E= {(A,A,A)}

Sólo hay un evento en el espacio muestral que cumple con este experimento.

Si se plantea un nuevo experimento como:

F= QUE AL TIRAR TRES MONEDAS CAIGAN AL MENOS DOS CARAS IGUALES

El espacio muestral está dado por:

N(F) = 8

F = {(S,S,S), (S,S,A), (S,A,S), (A,S,S), (A,A,S), (A,S,A), (S,A,A), (A,A,A)}

Nótese que el número de espacios muestrales es el mismo al del evento TIRAR UNA MONEDA, es decir, cualquier resultado posible cumple con lo establecido en el enunciado del experimento, por lo que tenemos un EVENTO SEGURO.

En un nuevo planteamiento, tenemos que

G = QUE AL TIRAR TRES MONEDAS AL AIRE, CAIGAN DOS ÁGUILAS

En este caso tendremos que el espacio muestral está dado por:

G = {(A,A,S), (A,S,A), (S,A,A)}   N(G) = 3

El espacio muestral está conformado por 3 puntos muestrales que cumplen con lo establecido en el experimento, pero que no representan la totalidad de resultados que es posible obtener. En este caso tenemos un SUCESO COMPUESTO.

Si tenemos un experimento que plantea QUE AL TIRAR TRES MONEDAS AL AIRE SE OBTENGAN TODAS LAS CARAS DIFERENTES. En este caso no existe en los posibles resultados una combinación que cumpla con lo que establece el experimento, por lo que tenemos un SUCESO IMPOSIBLE, que se presenta:

H = QUE AL TIRAR TRES MONEDAS AL AIRE SE OBTENGAN TODAS LAS CARAS DIFERENTES.

$N(H) = 0$

$H = \{\emptyset\}$

El espacio muestral de H es igual a un conjunto vacío.

Próxima entrega:

Elementos básicos de probabilidad II: Operaciones con sucesos

Referencias:

Anderson, D. R., SWeeney, D., & Williams, T. A. (1999). Estadística para la Administración y Economía. México DF, México: International Thompson Editores.

Departamento de Didáctica de la Matemática. (2011). Estadística con proyectos. (C. Batanero, & C. Díaz, Eds.) Granada, España: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

García Pérez, A. (2008). Estadística aplicada: conceptos básicos (2a edición ed.). Madrid, España: Educación permanente / Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Kazmier, L. J., Díaz Mata, A., & Eslava Gómez, G. (1991). Estadística Aplicada a Administración y Economía. Naucalpan, Estado de México, Atlacomulco, México: McGraw Hill.

Pérez López, C. (1999). Control estadístico de la calidad. Madrid, España: Alfa Omega.

Wackerly, D. D., Mendenhall III, W., & Scheaffer, R. (2010). Estadística Matemática con aplicaciones. México, D.F., México: Cengage Learning Editores, S.A.

Declaración de conflicto de intereses

Los autores de este artículo expresan que no tuvieron ningún conflicto de intereses durante la preparación de este documento ni para su publicación.

Obra protegida con una licencia

Creative Commons

Atribución-No Comercial-No Derivadas

Atribución – No comercial
No derivadas