Documentos educativos

Basic elements of probability II Operations with events.

Elementos básicos de probabilidad II: Operaciones con sucesos.

Juan Luis Soto Espinosa [1] : https://orcid.org/0000-0003-2600-9292

[1] Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

Correo electrónico de contacto: soej@unam.mx

Palabras clave: Estadística, probabilidad, propiedades, axiomas.

Fecha de envío: 08/10/2022

Fecha de aprobación: 15/11/2022

Abstract

The probability reflects the expectations that a given event will occur. These estimates are obtained by determining the number of favorable events that occur within several total events that are evaluated at a point in time. This feature allows the estimation of the occurrence of an event to be expressed using numerical values.

Keywords: probability, events, estimation

Resumen

La probabilidad refleja las expectativas de que un suceso determinado ocurra. Estas estimaciones se obtienen determinando el número de sucesos favorables se presentan dentro de un número de sucesos totales que se evalúan en un punto del tiempo. Esta característica permite que la estimación de la ocurrencia de un evento pueda ser expresada utilizando valores numéricos.

Palabras clave: probabilidad, sucesos, estimación.

Introducción

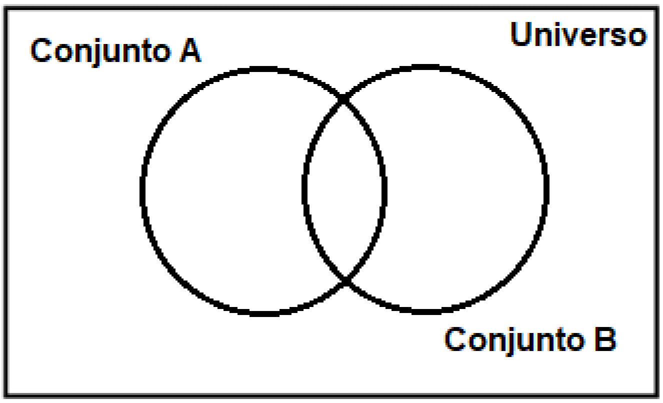
La probabilidad refleja las expectativas de que un suceso determinado ocurra. Estas estimaciones se obtienen determinando el número de sucesos favorables se presentan dentro de un número de sucesos totales que se evalúan en un punto del tiempo. Esta característica permite que la estimación de la ocurrencia de un evento pueda ser expresada utilizando valores numéricos.

Representación gráfica

Para representar de manera gráfica las probabilidades, en estadística se utilizan los Diagramas de Venn. Un diagrama de Venn es una representación gráfica de todas las posibles relaciones que se presentan entre grupos de elementos. Cada uno de los conjuntos representa a través de curvas cerradas (círculos) que pueden o no estar solapadas o sobrepuestas entre sí, todas las posibles relaciones lógicas entre conjuntos. Los círculos se ubican en el interior de un cuadrado que representa el universo de datos (la totalidad de elementos considerados en la representación).

El origen de este tipo de diagramas se debe al matemático y filósofo inglés John Venn, quien durante su trayectoria como académico en la Universidad de Cambridge realizó el estudio de teorías de conjuntos. Los diagramas que llevan su nombre fueron presentados en 1880 en un trabajo titulado “De la representación mecánica y diagramática de proposiciones y elementos” documento que tuvo gran repercusión en la investigación.

Los diagramas de Venn están compuestos por los siguientes elementos:



A pesar de que su origen se dio en el estudio de la Teoría de Conjuntos, los diagramas de Venn son ampliamente utilizados como herramientas para visualizar las probabilidades de múltiples eventos y analizar las posibles relaciones que existen entre éstos.

Junto con el uso de diagramas de Venn, para poder representar y realizar operaciones con sucesos se utilizan axiomas y teoremas.

Un axioma es una proposición tan evidente que se considera que no requiere demostración. Los axiomas de probabilidad son las condiciones mínimas que deben verificarse para que una función definida sobre un conjunto de sucesos determine consistentemente sus probabilidades (Kolmogórov, 1933).

Valores de probabilidad.

En la representación de sucesos, se utiliza la letra S para identificar el universo de elementos de estudio, mientras que cada suceso considerado se representa con una letra mayúscula, utilizando tantas como sucesos existan en el sistema. Si se tiene un suceso, se utiliza la letra A, si se tiene dos, se usan las letras A y B, si se tienen tres se usan la A, la B y la C, y así progresivamente.

La letra **P** se utiliza para designar la probabilidad de un evento, siendo **P(A)** la probabilidad de ocurrencia de un evento **A** en un experimento.

Algunos de los axiomas utilizados en el cálculo de probabilidades son los siguientes:

Si **A** es un evento de **S**, entonces la probabilidad del evento **A** es:

$$\mathbf{0} \le \boldsymbol{P(A)} \le \mathbf{1}$$

El valor de probabilidad más bajo es 0 para el suceso imposible, mientras que 1 es el valor más alto y corresponde a los eventos seguros. Para el resto de los casos es posible calcular la probabilidad mediante la ecuación:

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\boldsymbol{No\ de\ casos\ favorables}}{\boldsymbol{No\ de\ casos\ totales}}$$

Como es imposible obtener u valor negativo o tener un número de casos favorables mayor que el número de casos totales, la probabilidad de cualquier evento **A**, corresponde a un valor entre 0 y 1.

Por ejemplo, la posibilidad de que se encuentre un caso de diabetes dentro de una muestra de 10 individuos; si no existe un caso, la probabilidad de ocurrencia es cero, mientras que si los 10 participantes presentan el padecimiento, la probabilidad será 1. Para el resto de los casos, la probabilidad dependerá del número de participantes que presenten diabetes. Por ejemplo, si 4 participantes de los 10 considerados tienen diabetes, la probabilidad estará dado por:

$$P(A) = \frac{No\ de\ casos\ favorables}{No\ de\ casos\ totales} = \frac{4}{10} = 0.40$$

En ningún caso es posible tener una probabilidad mayor que 1, ya que el valor máximo que pueden tener los casos favorables siempre será el número de casos totales; en caso de que esto suceda, el valor obtenido será siempre 1.

Por otra parte, en ningún caso es posible tener un valor negativo, ya que en la ecuación:

$$P(A) = \frac{No\ de\ casos\ favorables}{No\ de\ casos\ totales}$$

El menor valor que puede adquirir el numerador, en el caso de que se tenga un evento sin casos favorables, es cero; si se tiene sucesos sin casos favorables, la operación resultante sería ***0/Número de casos totales***, y todo número dividido entre cero es cero.

Evento seguro:

Se conoce como evento seguro al que siempre se presenta como resultado de un suceso. Si tenemos un suceso con un resultado único, la probabilidad del evento seguro, denotado como W, es igual a 1.

P(W)=1

Ejemplo, la probabilidad de extraer una canica color rojo de un cajón que contiene 24 canicas rojas. Para obtener esta probabilidad se considera el número de casos favorables (canica roja) y se divide entre el número de casos totales, lo que nos lleva a:

$$P(A) = \frac{No\ casos\ favorables}{No\ casos\ totales} =$$

$$P(A) = \frac{24\ canicas\ rojas}{24\ canicas\ totales} = \frac{24}{24} = 1$$

Suceso imposible:

La probabilidad de un suceso imposible (un evento que nunca se presenta, independientemente de las condiciones del entorno), es siempre igual a cero

Ejemplo, la probabilidad de extraer una canica color negro de un cajón que contiene 24 canicas rojas. En este caso, el número de casos favorables en el sistema descrito es de cero (0) de un total de 24 casos posibles, debido a que ninguno de los elementos del ejemplo cumple con la característica de caso favorable. Lo que nos da el siguiente cálculo de probabilidades.

$$P(A) = \frac{No\ casos\ favorables}{No\ casos\ totales} =$$

$$P(A) = \frac{0\ canicas\ negras}{24\ canicas\ totales} = \frac{0}{24} = 0$$

Aún si cambia el número de casos totales (por ejemplo 50 canicas rojas), el número de casos favorables (canicas negras) seguirá siendo cero, por lo que el axioma se cumple pues el resultado de cero dividido por cualquier valor es siempre cero.

Suceso y complemento:

Si **A** es un evento cualquiera de un experimento aleatorio y **A’** es el complemento de **A**, entonces se cumple que:

$$P(A) + P(A') = 1$$

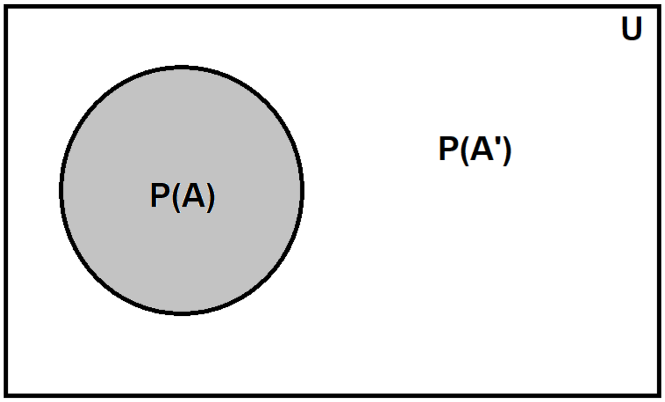
De donde se derivan:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

La probabilidad de que un evento **A** ocurra, es igual a 1 menos la probabilidad de que NO ocurra y viceversa.

Gráficamente:



Ejemplo: En una empresa con 100 empleados, en la que existen los puestos de almacenista, oficinista, vigilante, supervisor y obrero se desea realizar un estudio ergonómico sobre los almacenistas, de esta forma el suceso favorable sería:

A = No. de almacenistas en la empresa

El complemento de A (denotado como A') sería:

A' = No. de empleados que no son almacenistas.

Si el número de empleados es:

A = Almacenistas: 22

B = Oficinistas:10

C = Vigilante:12

D= Supervisor: 8

E = Obrero: 48

La probabilidad de A estaría dada por:

$$P(A) = \frac{22}{100} = 0.22$$

La probabilidad del complemento de A (A') estaría conformado por todos aquellos empleados cuyo nombramiento no sea el de almacenista, por lo tanto:

$$P(A') == \mathrm{P(B)+P(C)+P(D)+P(D)}$$

$$P(A') = P(\mathrm{B} \cup \mathrm{C} \cup \mathrm{D} \cup \mathrm{E}) =$$

$$\mathrm{P(B)} + P(C) + P(D) + P(E)$$

Matemáticamente:

$$P(A') = \frac{10 + 12 + 8 + 48}{100} = 0.78$$

Esta probabilidad del complemento de A = Almacenista, también puede obtenerse con fundamento en el axioma:

$$P(A) + P(A') = 1$$

Despejando P(A') tenemos:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Donde:

$$P(A') = 1 - 0.22 = 0.78$$

Suma de probabilidades:

En un suceso compuesto, que presenta varios resultados, la probabilidad total estará dada por la suma de las probabilidades individuales de los posibles resultados.

Por ejemplo, si en el experimento de tirar un dado definimos el suceso:

A= Número Par

Existen tres eventos que cumplen con este resultado: 2,4,6 que escrito en formato de espacio muestral tendríamos:

A = Número Par = {2,4,6}

La probabilidad del suceso Número par estaría dada por la suma de las probabilidades individuales de obtener como resultado 2, 4 y 6. Matemáticamente:

P(A) = P(2) + P(4) + P(6)

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

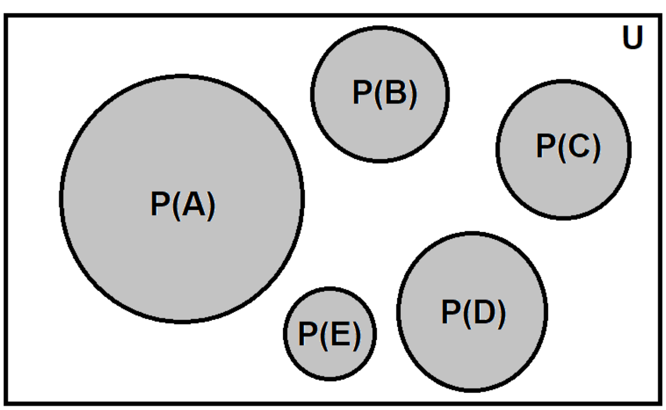
Por lo que la probabilidad de obtener un numero par al tirar un dado de seis caras será de 3 casos favorables de un total de 6 resultados posibles, lo que representa una probabilidad de 0.5.

Si se tiene un universo en el que existen varios sucesos, la suma de las probabilidades de todos los posibles resultados de un suceso es igual a uno. Matemáticamente:

$$P(A) + P(B) + P(C) + \cdots + P(n) = 1$$

Si el suceso está compuesto por varios sucesos mutuamente excluyentes (A, B, C, D, E), la suma total de probabilidades será siempre igual a 1.

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) = 1$$



Si hubiese 15 sucesos A y 35 sucesos B y ellos representaran el total de eventos (50), la probabilidad total estaría dada por:

$$P(A) = \frac{15}{50} = 0.30$$

$$P(B) = \frac{35}{50} = 0.70$$

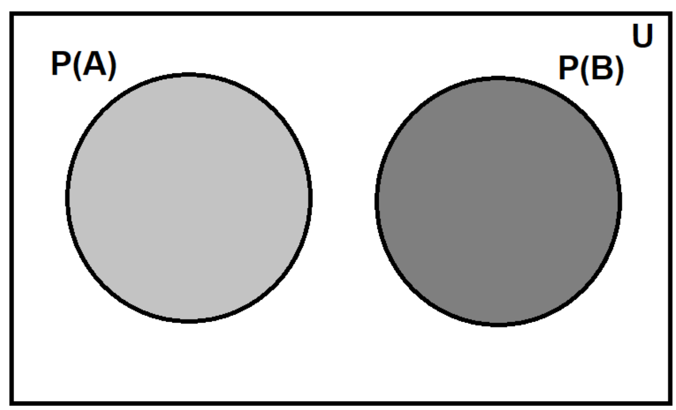
$$P(total) = P(A) + P(B) = 0.30 + 0.70 = 1$$

Sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes:

Dos Eventos (A y B) se consideran Mutuamente Excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente en el mismo experimento y la suma total de probabilidades de los dos eventos será siempre de 1.

$$P(A) + P(B) = 1$$

Gráficamente:



Unión de sucesos:

Si dos sucesos (A y B) son mutuamente excluyentes, la probabilidad de obtener **A** o **B** es igual a la probabilidad de obtener **A** más la probabilidad de obtener **B**.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

La unión es la propiedad de las probabilidades que, en un experimento con dos resultados posibles mutuamente excluyentes, permite estimar la ocurrencia de un resultado, el segundo o ambos al mismo tiempo. También se le conoce como propiedad de conjunción.

Así, la probabilidad de obtener águila o sol al tirar una moneda al aire está dada por:

$$\boldsymbol{P(\text{Águila}) = P(A) =}$$

$$\boldsymbol{\frac{1\ resultado\ favorable}{2\ resultados\ posibles} = \frac{1}{2} = 0.5}$$

$$\boldsymbol{P(Sol) = P(B) =}$$

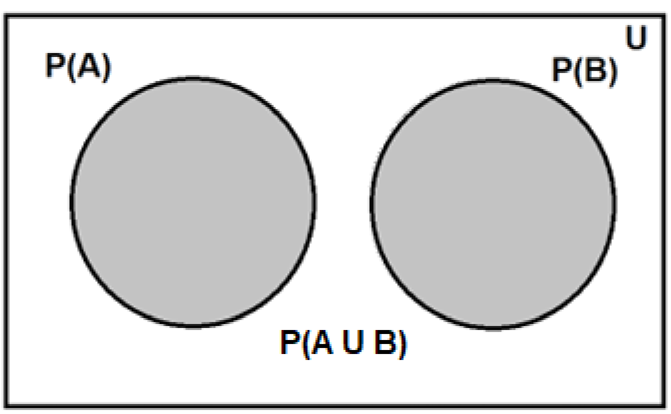
$$\boldsymbol{\frac{1\ resultado\ favorable}{2\ resultados\ posibles} = \frac{1}{2} = 0.5}$$

Probabilidad de águila o sol P (A U B):

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

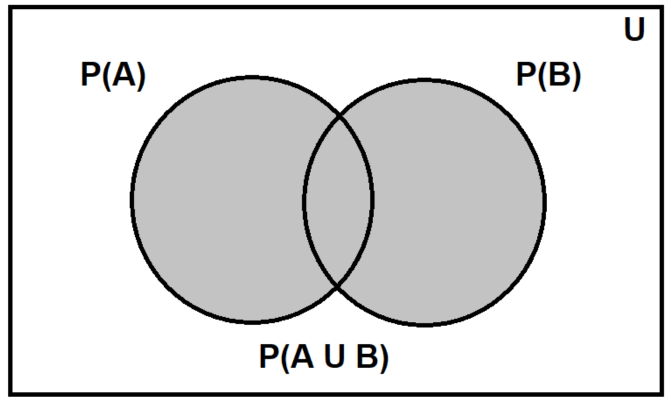
$$\boldsymbol{P(A \cup B) = 0.5 + 0.5 = 1}$$

Si A y B representan eventos mutuamente excluyentes, su diagrama de Venn sería:



Este teorema se cumple también si los sucesos tienen elementos en común, esto es, existen elementos que pertenecen tanto al suceso A como al suceso B.

Si P(A) y P(B) representan las probabilidades para los dos eventos A y B, entonces P(A U B) representa la probabilidad de que ocurran **A** o **B**. Si representamos los eventos A y B en un Diagrama de Venn se tendrá:



Dónde el área gris representa los elementos que cumplen con la condición “Ser un elemento de A” O “Ser un elemento de B; es decir, pertenecer al conjunto de datos A, al conjunto de datos B o a ambos al mismo tiempo.

En el caso de que el suceso tenga más de dos resultados posibles (por ejemplo, tirar un dado) la unión de resultados (o disyunción de resultados) será siempre la suma de las probabilidades individuales, por ejemplo:

A = Obtener un valor de uno

B = Obtener un valor de dos

C = Obtener un valor de tres

La probabilidad de cada suceso (**P(S)**)caso está dada por:

$$\boldsymbol{P(S) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ totales}}$$

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1\ (una\ cara\ con\ el\ valor\ de\ 1)}{6\ (Resultados\ posibles)} = 0.166}$$

$$\boldsymbol{P(B) = \frac{1\ (una\ cara\ con\ el\ valor\ de\ 2)}{6\ (Resultados\ posibles)} = 0.166}$$

$$P(C) = \frac{1\ (una\ cara\ con\ el\ valor\ de\ 3)}{6\ (Resultados\ posibles)} = 0.166$$

La probabilidad de la Unión del suceso A o el suceso B o el suceso C, está dada por:

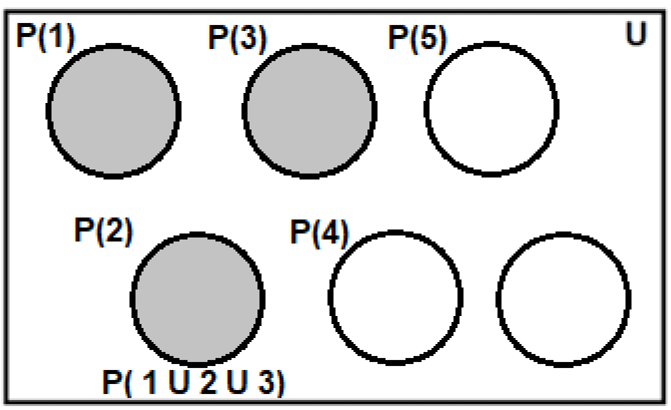
$$P(A\ \cup B\ \cup C) = Probabilidad\ de\ obtener\ 1 + Probabilidad\ de\ obtener\ 2 + Probabilidad\ de\ obtener\ 3$$

$$P(A\ \cup B\ \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

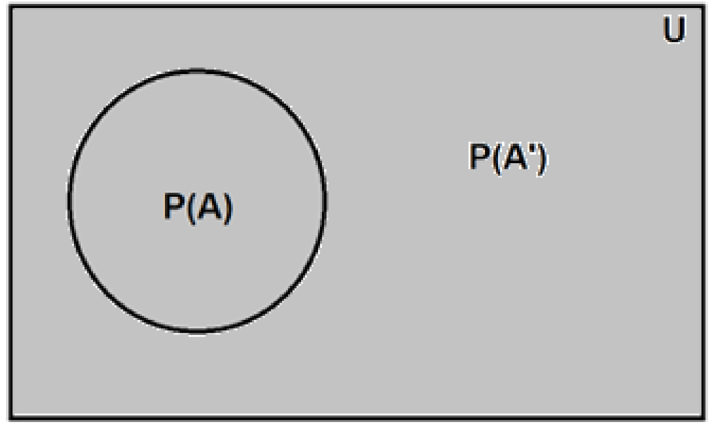
$$P(A\ \cup B\ \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$P(A\ \cup B\ \cup C) = P(1) + P(2) + P(3)$$

$$P(A\ \cup B\ \cup C) = 0.166 + 0.166 + 0.166 = 0.498$$



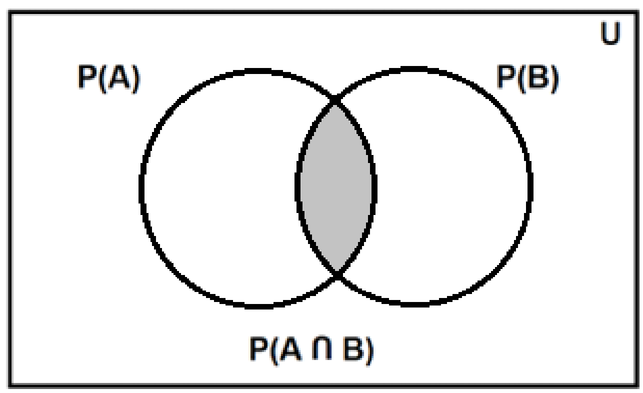
En este mismo sentido, un solo suceso, donde exista un conjunto que representa el suceso A, la unión del suceso con su complemento será siempre igual al Universo, esto quiere decir que la sumatoria de la probabilidad de un suceso único con su complemento es igual a uno (1). Como se muestra en el siguiente diagrama:



P(A U A') = 1

Conjunción de sucesos:

Se conoce como conjunción al evento en el que existen elementos que pertenecen a dos o más eventos al mismo tiempo. Si A y B son eventos en que tienen elementos en común, su comportamiento se representa con el siguiente diagrama de Venn:



Donde el área en gris representa los elementos que pertenecen tanto al suceso A como al Suceso B. Matemáticamente:

$$P(A \cap B) \neq \emptyset$$

Por ejemplo, en una muestra de 75 trabajadores se realiza un estudio para determinar la probabilidad de ocurrencia de problemas de salud en una población, para lo cual se consideran dos sucesos:

A = Trabajadores con hipertensión

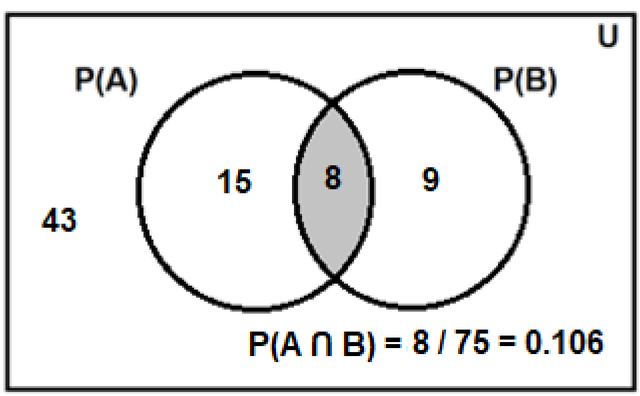
B = Trabajadores con diabetes

Se encuentra que 17 trabajadores tienen problemas de hipertensión, mientras que 23 tienen problemas de diabetes. La probabilidad de cada suceso está dada por:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ totales} = \frac{17}{75} = 0.226}$$

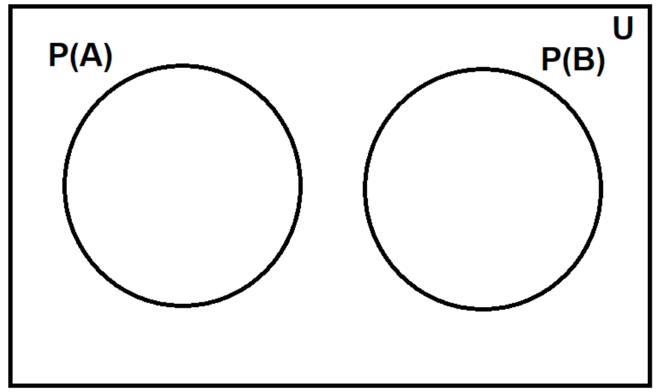
$$\boldsymbol{P(B) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ totales} = \frac{23}{75} = 0.306}$$

La intersección o conjunción de sucesos estaría constituida, en este caso, por aquellos trabajadores que tengan problemas de Hipertensión y diabetes AL MISMO TIEMPO, esto es, cumplen con la condición del suceso A "Trabajadores con hipertensión" y con la condición del suceso B "Trabajadores con diabetes", por lo que pertenecen a uno y otro suceso. Si se tiene que 8 trabajadores cumplen con la condición de ambos sucesos, gráficamente se representa con el siguiente diagrama de Venn:



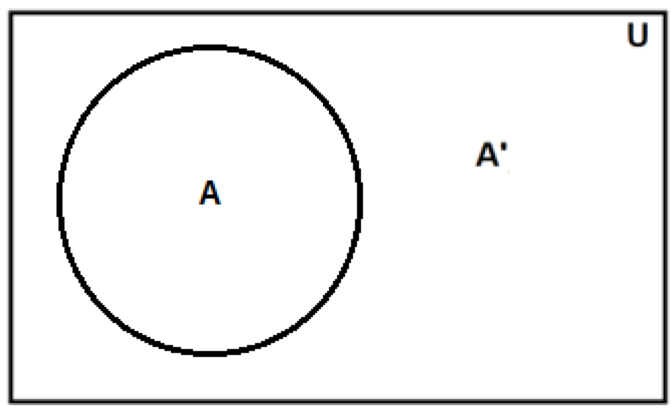
Si A y B son sucesos que **no tienen elementos en común**, es decir, son **mutuamente excluyentes**, la intersección entre ambos será siempre un conjunto vacío, que se representa por el símbolo Ø.

Representado en un diagrama de Venn, la intersección de dos sucesos mutuamente excluyentes será:



$$\boldsymbol{P(A \cap B) = \emptyset}$$

En este sentido, la interjección de un suceso A con su complemento es siempre un conjunto vacío.



Por lo tanto, el resultado de la interjección de la probabilidad de A con la probabilidad del complemento de A (denotado como A') es siempre un conjunto vacío. Matemáticamente:

$$\boldsymbol{P(A \cap A') = \emptyset}$$

La ausencia de un área en gris expresa que no existen elementos en común entre un suceso y su complemento.

Diferencia de sucesos:

La diferencia de sucesos, expresada como A – B es el suceso conformado por todos los elementos de A que no pertenecen a B, cuando los sucesos no son mutuamente excluyentes.

Por ejemplo, si se los dos sucesos siguientes:

A = Trabajadores con hipertensión

B = Trabajadores del sexo femenino

El suceso de diferencia, designado como A – B, implica que se deben de tomar en cuenta todos los trabajadores de una institución exceptuando aquellos trabajadores de sexo femenino.

Si la institución tiene un total de 150 trabajadores, se encontró que 47 tenían problemas de hipertensión. ¿Cuál s la probabilidad de hipertensión en la institución?

A= Problemas de hipertensión

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{47}{150} = 0.313}$$

Después de un análisis, se encontró que 33 hombres y 14 mujeres presentaron problemas de hipertensión

¿Cuál es la probabilidad de hombres con hipertensión?

Para resolver esta cuestión, a la probabilidad total de hipertensión debemos extraer la probabilidad de mujeres con hipertensión, matemáticamente:

A = Problemas de hipertensión

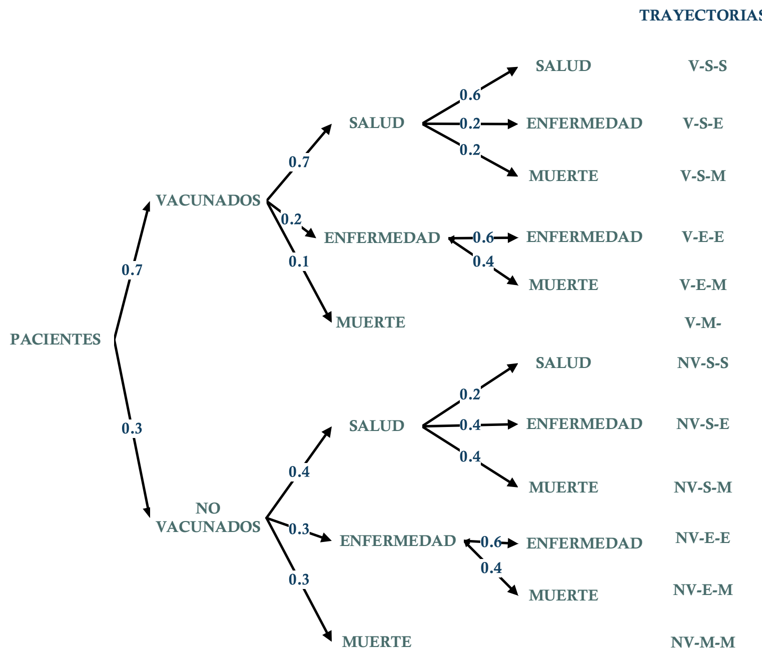
B = Mujeres con hipertensión

A – B sería la diferencia que nos devolvería la probabilidad de la probabilidad total de hipertensión menos la probabilidad de mujeres con hipertensión, dando como resultado la probabilidad de hombres con hipertensión. En notación matemática:

$$\boldsymbol{P(A-B) = P(A) - P(B) = \frac{47}{150} - \frac{14}{150} = \frac{33}{150} = 0.22}$$

Lo cual es consistente con la probabilidad *a priori* de hombres con hipertensión:

C = Hombres con hipertensión



$$\boldsymbol{P(C) = \frac{33}{150} = 0.22}$$

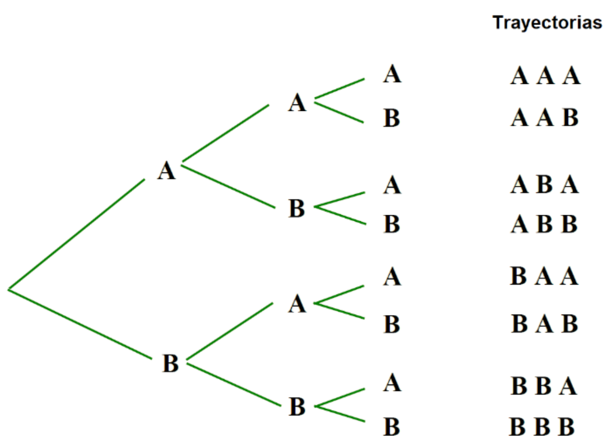
Representación de probabilidades: Diagrama de árbol.

Para facilitar la visualización de la probabilidad de un suceso con varios resultados existen varias herramientas gráficas, entre las que destaca el árbol de probabilidad.

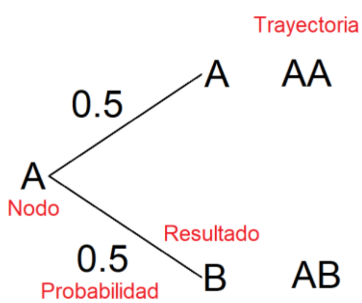
El diagrama de árbol es un método para representar la probabilidad de diferentes resultados en un experimento donde se presentan sucesos consecutivos.

Cada uno de los sucesos se presenta como una ramificación en el diagrama de árbol. A la ruta que se sigue en el diagrama para determinar la probabilidad de ocurrencia de un suceso con resultados consecutivos se le conoce como TRAYECTORIA.

Un diagrama de árbol tiene la siguiente estructura:



Dónde A y B son resultados posibles de sucesos consecutivos. Las partes del diagrama son:



Ejemplo: Un estudio acerca de la evolución de una enfermedad infecciosa en pacientes, ha generado los datos de seguimiento siguientes:

Transformando la información en un diagrama de árbol, obtenemos la estructura siguiente:

Este tipo de organizador gráfico es de suma utilidad en el cálculo de probabilidades de eventos consecutivos, por ejemplo, ¿cuál sería la probabilidad de seleccionar un paciente que fue vacunado haya enfermado en un primer evento y fallecido en consecuencia?

Tipo de paciente	**Porcentaje observado**	**Resultado**	**Porcentaje observado**	**Resultado**	**Porcentaje observado**
Vacunado	0.7	Salud	0.7	Salud	0.6
				Enfermedad	0.2
				Muerte	0.2
		Enfermedad	0.2	Salud	0
				Enfermedad	0.6
				Muerte	0.4
		Muerte	0.1	---	---
No vacunado	0.3	Salud	0.6	Salud	0.4
				Enfermedad	0.3
				Muerte	0.3
		Enfermedad	0.2	Salud	0
				Enfermedad	0.7
				Muerte	0.3
		Muerte	0.2	---	---

Siguiendo la trayectoria de eventos V-E-M (vacunados-enfermedad-muerte), tenemos que la probabilidad de que un paciente vacunado (0.7) haya enfermado (0.2) y muerto en consecuencia (0.4), estaría dada por la ecuación:

$$\boldsymbol{P(V-E-M) = P(vacunados) * P(enfermedad) * P(muerte)}$$

$$\boldsymbol{0.7 * 0.2 * 0.4 = 0.056}$$

¿cuál sería la probabilidad de que seleccionar un paciente no vacunado que enferme y muera?

Ahora la trayectoria de eventos estaría dada por NV-E-M (No vacunado – Enfermedad-Muerte), el cálculo de probabilidad sería:

$$\boldsymbol{P(NV-E-M) = P(No\ vacunados) * P(enfermedad) * P(muerte)}$$

$$\boldsymbol{P(NV-E-M) = 0.3 * 0.2 * 0.6 = 0.036}$$

Este tipo de estructura permite evaluar la probabilidad de eventos indivduiales, por ejemplo ¿cuál sería la probabilidad de que un paciente vacunado enferme y muera contra la probabilidad de que un paciente No vacunado enferme y muera?

La primera probabilidad estaría dada por:

Pv(E-M) = P(E)*P(M) =0.2 * 0.4 = 0.08

Mientras que la segunda estaría dada por:

Pnv(E-M) = P(E)*P(M) = 0.2*0.6 = 0.12

Tomando la proporción entre ambos:

$$\frac{\boldsymbol{Pv(E-M)}}{\boldsymbol{Pnv(E-M)}} = \frac{\mathbf{0.08}}{\mathbf{0.12}} = \mathbf{0.66}$$

De donde se desprende que los pacientes vacunados tienen casi la mitad de la probabilidad de fallecer que los pacientes no vacunados.

Si el cociente se plantea a la inversa:

$$\frac{\boldsymbol{Pnv(E-M)}}{\boldsymbol{Pv(E-M)}} = \frac{\mathbf{0.12}}{\mathbf{0.08}} = \mathbf{1.5}$$

En este caso, tenemos que los pacientes no vacunados tienen una probabilidad de enfermar y fallecer 1.5 veces mayor que los pacientes vacunados.

Al cociente entre las probabilidades de ocurrencia de un evento de los pacientes expuestos entre la misma probabilidad de los pacientes no expuestos se le conoce como RAZÓN DE RIESGO.

Próxima entrega:

Elementos básicos de probabilidad III: Razón de Riesgo o Riesgo Relativo.

Referencias:

Anderson, D. R., Sweeney, D., & Williams, T. A. (1999). Estadística para la Administración y Economía. México DF, México: International Thompson Editores.

Departamento de Didáctica de la Matemática. (2011). Estadística con proyectos. (C. Batanero, & C. Díaz, Eds.) Granada, España: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

García Pérez, A. (2008). Estadística aplicada: conceptos básicos (2a edición ed.). Madrid, España: Educación permanente / Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Kazmier, L. J., Díaz Mata, A., & Eslava Gómez, G. (1991). Estadística Aplicada a Administración y Economía. Naucalpan, Estado de México, Atlacomulco, México: McGraw Hill.

Pérez López, C. (1999). Control estadístico de la calidad. Madrid, España: Alfa Omega.

Wackerly, D. D., Mendenhall III, W., & Scheaffer, R. (2010). Estadística Matemática con aplicaciones. México, D.F., México: Cengage Learning Editores, S.A.

Declaración de conflicto de intereses

Los autores de este artículo expresan que no tuvieron ningún conflicto de intereses durante la preparación de este documento ni para su publicación.

Obra protegida con una licencia Creative Commons