Documentos educativos

Standard Normal Distribution and probability calculation with Z values
Distribución Normal Estándar y cálculo de probabilidades con valores Z.

Soto Espinosa Juan Luis [1] 0000-0003-2600-9292, **Herrera Márquez Alma Xóchitl** [1 2] 0000-0001-5039-5862 .

[1] *Especialización en Salud en el Trabajo, FES Zaragoza, UNAM*
[2] *Universidad Rosario Castellanos*
Correo electrónico de contacto: soej@unam.mx

Fecha de envío: 22/08/2024
Fecha de aprobación: 15/11/2024

Abstract

The standard normal distribution, also known as typical normal distribution or reduced normal distribution, is a model distribution that has a mean with a value of zero ($\mu = 0$), and a standard deviation equal to one ($\sigma = 1$). In this type of distribution, all the values of the variable are expressed based on the mean and standard deviation of the data set, through a process called standardization. To identify a typical normal distribution, the notation N(0,1) is used, where the letter N indicates normality, zero corresponds to the value of the mean and 1 to the value of the standard deviation.

Standardization allows the values of the variable X to be transformed to obtain a normalized variable identified as Z, from which it is possible to determine the value of the probability of occurrence of a value through tables.

Keywords: Standard Normal Distribution, Z value, Probability, probability table, Z values.

Resumen

La distribución normal estándar, conocida también como distribución normal típica o distribución normal reducida, es una distribución modelo que tiene una media con valor cero ($\mu = 0$), y una desviación estándar igual a uno ($\sigma = 1$). En este tipo de distribución, todos los valores de la variable son expresados en función de la media y la desviación estándar del conjunto de datos, a través de un proceso llamado estandarización. Para identificar una distribución normal típica, se utiliza la notación N(0,1), donde la letra N indica normalidad, el cero corresponde al valor de la media y el 1 al valor de la desviación estándar.

La estandarización permite transformar los valores de la variable X para obtener una variable normalizada identificada como Z, a partir de la cual es posible determinar el valor de la probabilidad de ocurrencia .de un valor por medio de tablas.

Palabras clave: Distribución Normal Estándar, Valor Z, Probabilidad, tabla de probabilidad, valores Z

Introducción

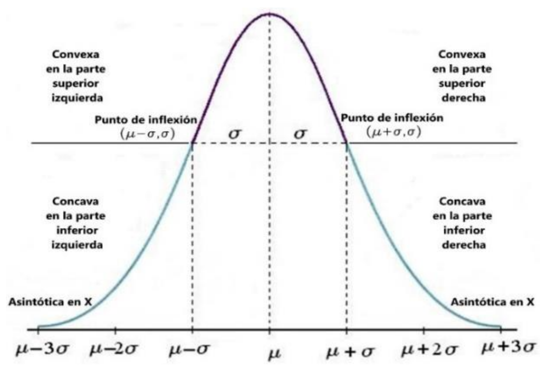
Como se comentó en la entrega anterior, la distribución normal es considerada como la más importante de todas las distribuciones de probabilidad debido a que explica una gran cantidad de fenómenos y procesos tanto naturales como sociales. La distribución normal, cuya gráfica es conocida como campana de Gauss (su función de probabilidad tiene forma de campana), es aplicable de forma directa a muchos fenómenos y sus propiedades han permitido el desarrollo de numerosas técnicas de inferencia estadística.

Recordemos que la distribución normal es una función de probabilidad de una variable continua. Las variables continuas son aquellas que pueden adoptar cualquier valor numérico en el marco de un intervalo que ya está predeterminado. Entre dos de los valores, siempre puede existir otro valor intermedio, susceptible de ser tomado como valor por la variable continua. Un ejemplo de variable continua es el peso.

Históricamente, el nombre de “Normal” proviene del hecho de que durante un tiempo se creyó, por parte de médicos y biólogos, que todas las variables naturales de interés seguían este modelo.

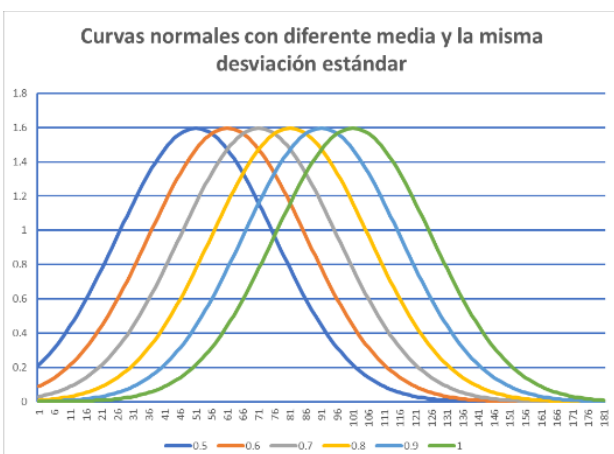
La distribución normal es toda una familia de curvas, derivadas del comportamiento de una variable continua, cuya gráfica tiene una forma acampanada y su apariencia está determinada básicamente por dos parámetros estadísticos: la media (μ) y la desviación estándar (σ). La distribución normal tiene la siguiente estructura:

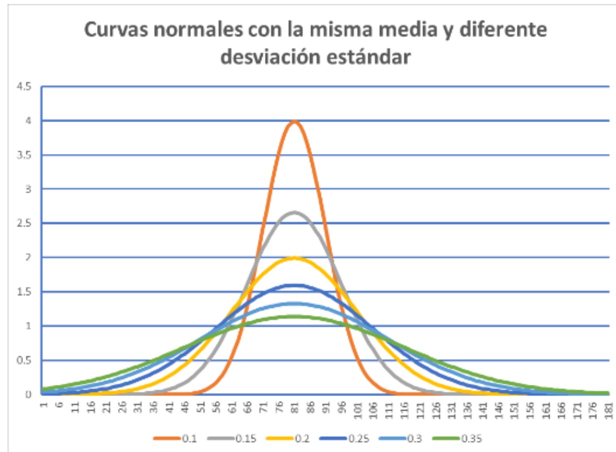
Figura 1 Estructura de la distribución normal (gráfica de Gauss)

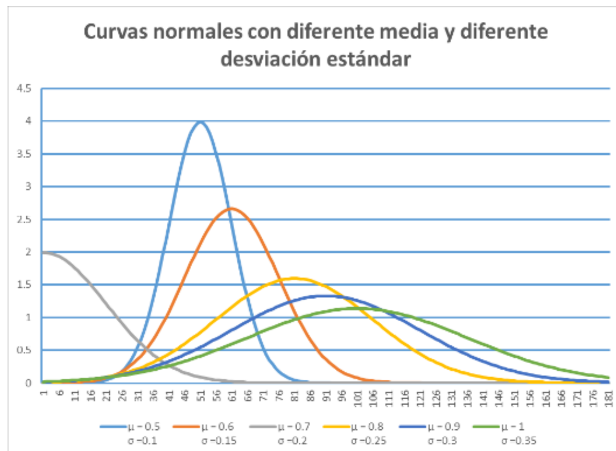


Al ser una gráfica producto de un gran número de fenómenos, con medias y desviaciones estándar infinitas (figura 2), resulta necesario generar un modelo matemático que permita el estudio de todos los casos.

Figura 2 Familias de curvas normales, en función de la media y la desviación estándar







Distribución normal estándar

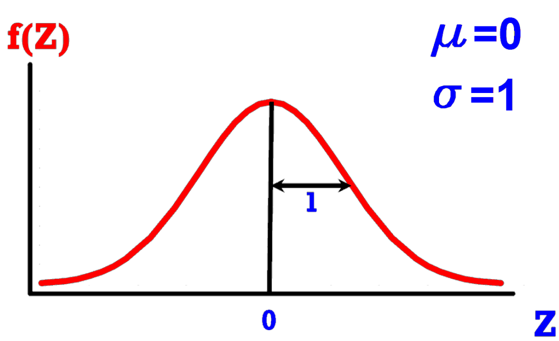
La **distribución normal estándar**, conocida también como **distribución normal típica** o **distribución normal reducida**, es una distribución modelo que tiene una media con valor cero (μ =0), y una desviación estándar igual a uno (σ =1). En este tipo de distribución, todos los valores de la variable son expresados en función de la media y la desviación estándar del conjunto de datos, a través de un proceso llamado estandarización. Para identificar una distribución normal típica, se utiliza la notación N(0,1), donde la letra N indica normalidad, el cero corresponde al valor de la media y el 1 al valor de la desviación estándar.

La estandarización permite transformar los valores de la variable X, en términos de la media y la desviación estándar, para obtener una variable normalizada identificada como Z. Para obtener el valor Z, se procede a restar a la variable X el valor de la media y el resultado se divide entre la desviación estándar. Matemáticamente:

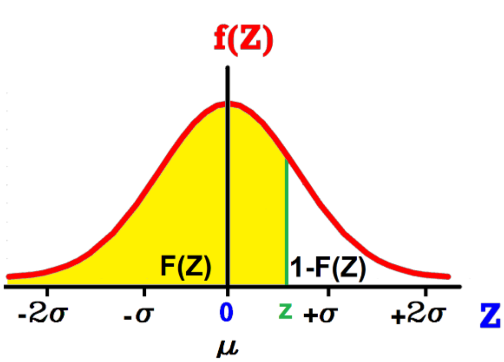
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Dónde:
Z = Variable estandarizada
X = Variable origen
µ = Media
σ = Desviación estándar
Cualquier distribución normal puede convertirse en una distribución normal estándar, transformando los valores de X en valores Z, de forma que la gráfica exprese probabilidades en término de la distancia en desviaciones estándar a la que se encuentre de la media. Cabe señalar que cuando X = µ, el valor obtenido siempre será cero (Figura 3).

Figura 3 Curva de la distribución normal estándar



La función de densidad de probabilidad de una distribución normal tipificada, está dada N(0,1)por:



Con base en lo anterior, cualquier distribución normal, al ser tipificada, puede expresarse en términos de la variable Z, como se muestra en el siguiente cuadro:

Valor	X	Z
Media	$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}$ µ (Calculada a partir de los datos)	$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = \frac{0}{\sigma} = 0$
Desviación estándar	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(x - \bar{x})^2}{n}}$ σ (Calculada a partir de los datos	$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\sigma - \mu}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}$ Como µ se encuentra tipificada tenemos: $Z = \frac{\sigma}{\sigma} - \frac{\frac{\mu - \mu}{\sigma}}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} - \frac{0}{\sigma} = 1 - 0 = 1$
Valor a 1 desviación estándar arriba de la media	µ + σ	µ + σ = 0 + 1 = 1
Valor a 2 desviaciones estándar arriba de la media	µ + 2σ	µ + 2σ = 0 + 2 = 2
Valor a 3 desviaciones estándar arriba de la media	µ + 3σ	µ + 3σ = 0 + 3 = 3
Valor a 1 desviación	µ - σ	µ - σ = 0 – 1 = -1

Valor	X	Z
estándar debajo de la media		
Valor a 2 desviaciones estándar debajo de la media	μ - 2σ	μ - 2σ = 0 - 2 = -2
Valor a 3 desviaciones estándar debajo de la media	μ - 3σ	μ - 3σ = 0 – 3 = -3

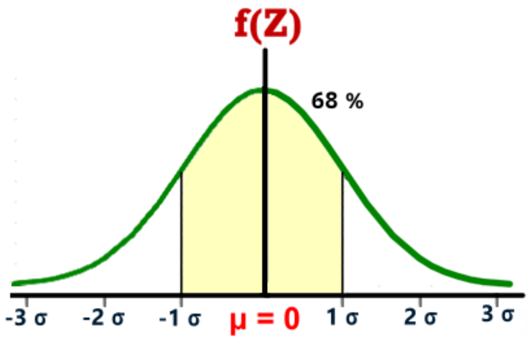
Resumiendo, la tabla, tenemos:

Valor	X	Z
Media	μ (Calculada a partir de los datos)	0
Desviación estándar	σ (Calculada a partir de los datos	1
Valor a 1 desviación estándar arriba de la media	μ + σ	1
Valor a 2 desviaciones estándar arriba de la media	μ + 2σ	2
Valor a 3 desviaciones estándar arriba de la media	μ + 3σ	3
Valor a 1 desviación estándar debajo de la media	μ - σ	-1
Valor a 2 desviaciones estándar debajo de la media	μ - 2σ	-2
Valor a 3 desviaciones estándar debajo de la media	μ - 3σ	-3

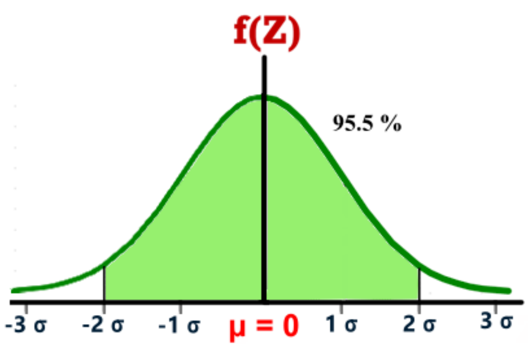
Para realizar el cálculo de probabilidad debajo de una curva normal estándar, se parte de las siguientes premisas:

- Se trata de una función de probabilidad de una variable continua.
- Su gráfica tiene forma de campana.
- Es una gráfica asintótica sobre el eje x.
- Considera valores de la variable independiente (X) que van de -∞ a +∞.
- La forma de la gráfica de la distribución está dada por la media (μ) y la desviación estándar (σ)
- El valor de su media (μ) es igual a cero.
- El valor de su desviación estándar (σ) es igual a uno.
- La notación para referirse a una distribución estándar en particular es N(μ,σ) donde μ es la media y σ la desviación estándar.
- La notación para referirse a la desviación normal estándar es, entonces: N(0,1)
- Para toda distribución normal se cumple que en el intervalo:
- μ ± σ se encuentra el 68% de la distribución.
- μ ± 2σ se encuentra el 95,5% de la distribución.
- μ ± 3σ se encuentra el 99,7% de la distribución.

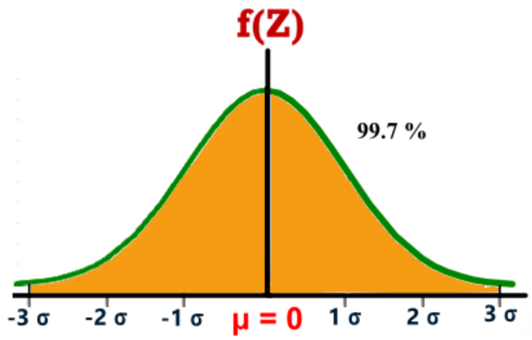
Densidad de probabilidad a una desviación estándar de la media (entre -1σ y 1σ)



Densidad de probabilidad a dos desviaciones estándar de la media (entre -2σ y 2σ)



Densidad de probabilidad a tres desviaciones estándar de la media (entre -3σ y 3σ)



- La probabilidad total bajo la curva es igual a 1
- La curva es simétrica con respecto a la media de la distribución, por lo que existe una probabilidad de 50% de observar un dato mayor que la media, y 50% de observar un dato menor.
- Es posible estandarizar cualquier valor de la variable independiente y transformarla a un valor tipificado Z.

Tomando en cuenta estas propiedades, es posible calcular el valor de la probabilidad debajo de la curva, con las siguientes consideraciones:

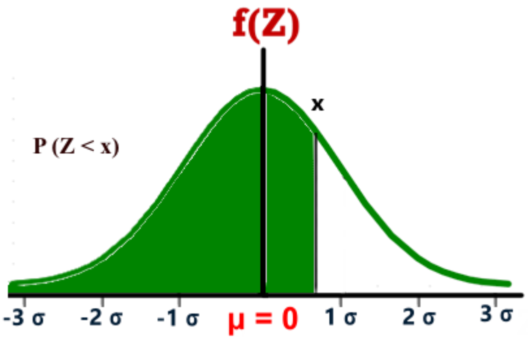
La tabla de probabilidades Z más común contiene las probabilidades de $P(z \leq k)$, recuerde que Z es la variable tipificada a partir de los datos, la media y la desviación estándar y k el valor tipificado del que se desea determinar la probabilidad.

Estas probabilidades nos dan la función de distribución $\Phi(k)$, donde Φ representa la función de distribución acumulada normal de probabilidad

$\Phi(k) = P(z \leq k)$ En la tabla de valor de k se ubican las unidades y décimas en la columna de la izquierda y las centésimas en la fila de arriba.

Existen diferentes casos en los que se requiere el cálculo de probabilidades, los cuales se describen a continuación:

a) La probabilidad de ocurrencia de valores inferiores al valor de interés (x).



Ejemplo 1:

La temperatura durante el verano está distribuida normalmente con media 19.3°C y desviación standard 5°C. Calcule la probabilidad de que la temperatura durante este verano esté por debajo de 23°C.

Datos: μ = 19.3°C σ = 5°C X = 23°C

Transformemos el valor X = 23°C a unidades Z, utilizando la ecuación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Sustituyendo X = 23°C μ = 19.5°C y σ = 5°C, tenemos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{23°C - 19.3°C}{5°C} = \frac{3.7°C}{5°C} = 0.74$$

Con lo que al tipificar x= 23 obtenemos el valor Z = 0.74

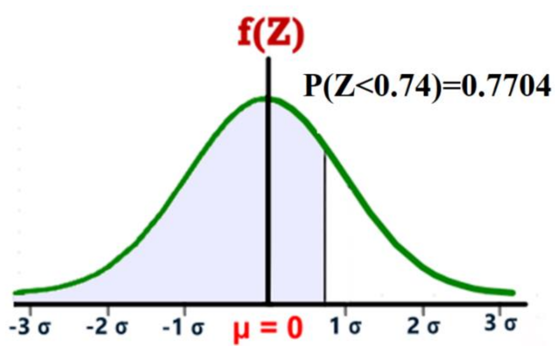
Una vez determinado el valor Z, se procede a buscar en la tabla. Para localizar el valor de la probabilidad de z=0.74, se busca el valor entero con el primer valor decimal en la columna de la izquierda, mientras que el segundo decimal se ubica en el encabezado de las columnas, la celda donde su cruzan la fila y columna elegidas contiene el valor de la probabilidad buscada.

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,(
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8

De acuerdo con la tabla y para el valor de Z = 0,74 tenemos que la probabilidad es de 0.7704. Cabe señalar que la tabla utilizada nos da la probabilidad ocurrencia de sucesos menores al valor buscado; por lo tanto, la probabilidad de que la temperatura sea menor a 23°C es de 0.7704 o, expresado en porcentaje, del 77.04%.

Sucesos con un valor inferior a 0.7704 es equivalente a decir, en este ejemplo, temperaturas inferiores 23°C; Cuando utilizamos la variable X se habla de temperatura, cuando se utiliza la variable Z se habla de la distancia entre la variable tipificada y la media, en unidades de desviación estándar.

Con esta última afirmación, un valor Z=0.7704 significa que 23°C se encuentra alejado de la media 0.7704 veces la desviación estándar; como el valor es positivo, esta distancia se encuentra hacia la derecha de la media, dado que el valor de X es mayor que la media, cuando el valor sea negativo, el punto en cuestión será menor que la media y se localizará hacia la izquierda de esta en una gráfica.

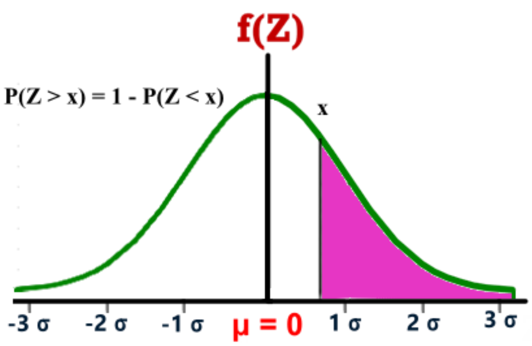


El ejemplo anterior muestra la forma de determinar la probabilidad de que la temperatura sea menor a

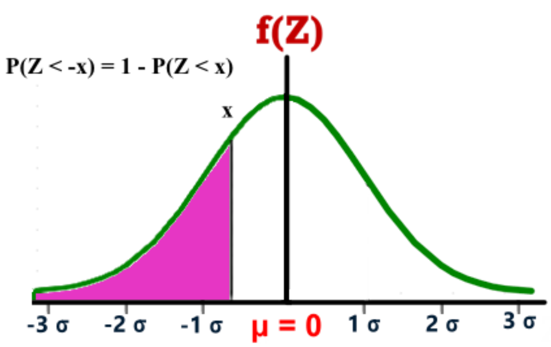
23°C, pero ¿qué sucede en el caso de que se desee determinar la probabilidad de que la temperatura sea mayor a este valor?

b) La probabilidad de ocurrencia de un valor positivo mayor que el valor de interés.

Al buscar una probabilidad inferior a un valor de interés, es posible buscar tanto valores positivos como negativos de una variable, en este inciso debemos considerar ambos casos. Para el caso de la probabilidad Z > x, la probabilidad de interés está dada por:



En el caso de buscar la probabilidad de un valor de interés, pero con signo negativo Z < -x, estaría dada por:



Como puede notarse, para obtener la probabilidad de Z > x y de Z < -x se utiliza la misma fórmula debido a que la distribución normal es una distribución simétrica.

Ejemplo 2:

Considerando la misma media y desviación estándar que el ejemplo 1, la determinación del valor Z es exactamente el mismo, con lo que tendremos un valor Z = 0.7704

Sin embargo, en esta ocasión requerimos la probabilidad complementaria, ya que se busca la probabilidad de temperaturas por encima del 23°C.

Para resolver este problema recordemos que la probabilidad total bajo la curva siempre es igual a uno (1), además, debemos considerar el axioma que establece que la probabilidad de ocurrencia de un evento más la probabilidad de ocurrencia de su complemento es siempre igual a 1, es decir:

P(A) + P(A’) =1

Para este problema conocemos la probabilidad del evento definido por

A = temperaturas menores a 23°C

es decir:

P(Temperaturas menores a 23°C) = P(A) = 0.7704

El complemento de A sería:

A’ = temperaturas mayores a 23°C

Además, sabemos que:

P(A) + P(A’) = 1

O sea

P(Temperaturas menores a 23°C) + P(Temperaturas mayores a 23°C) = 1

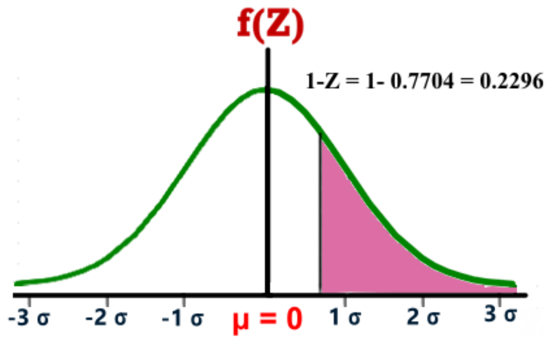
Despejando P(A’) tenemos que

P (A’) =P(temperaturas mayores a 23°C) = 1 – P(Temperaturas menores a 23°C)

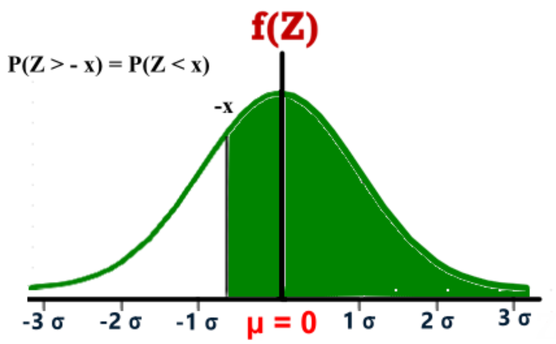
Sustituyendo el valor conocido de la probabilidad de temperaturas menores a 23°C tenemos:

P(Temperaturas mayores a 23°C) = 1 – 0.7704 = 0.2296

Por lo tanto, la probabilidad de ocurrencia de temperaturas por encima de 23°C es de 0.2296, que expresado en porcentaje es 22.96%.



c) La probabilidad de ocurrencia de un valor mayor que un valor negativo de la variable de interés.



Ejemplo 3:

Retomando el ejemplo 1, donde la temperatura durante el verano está distribuida normalmente con media 19.3°C y desviación standard 5°C. Calcule la probabilidad de que la temperatura durante este verano esté por encima de 15.6 °C.

Datos: μ = 19.3°C σ = 5°C X = 15.6°C

Transformemos el valor X = 23°C a unidades Z, utilizando la ecuación:

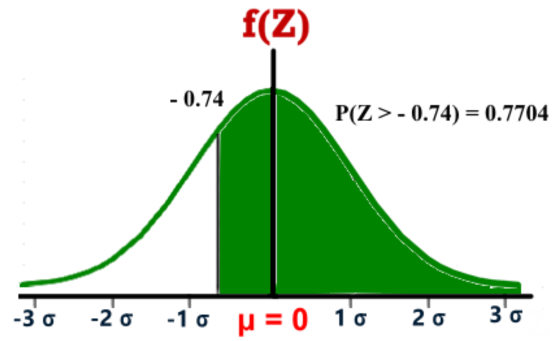
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Sustituyendo X = 21°C μ = 19.5°C y σ = 5°C, tenemos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{15.6°C - 19.3°C}{5°C} = \frac{-3.7°C}{5°C} = -0.74$$

Con lo que al tipificar x= 15.6 obtenemos el valor Z = -0.74

Una vez determinado el valor Z, se procede a buscar en la tabla. Para localizar el valor de la probabilidad de z=0.74 (sin considerar el signo negativo), se busca el valor entero con el primer valor decimal en la columna de la izquierda, mientras que el segundo decimal se ubica en el encabezado de las columnas.

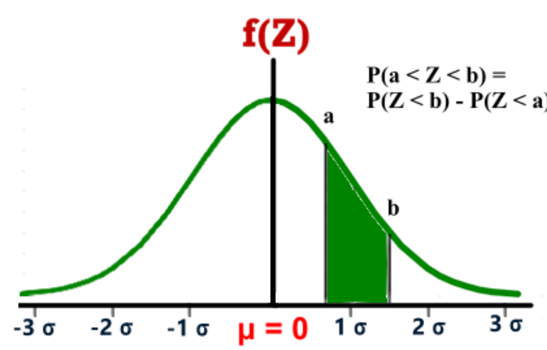


De acuerdo con la tabla y para el valor de Z = 0.74 tenemos que la probabilidad es de 0.7704 o de 77.04 % de que se presenten temperaturas superiores a 15.6°C durante el verano.

Por propiedad de simetría de la distribución normal, esta probabilidad corresponde a la probabilidad buscada.

d) La probabilidad de ocurrencia de un valor de la variable de interés entre dos valores de referencia positivos.

En este caso, se busca la probabilidad de ocurrencia de un valor entre dos valores de referencia positivos (mayores que la media), la determinación de esta probabilidad está dada por:



Ejemplo 4:

Retomando el mismo problema, ¿cuál es la probabilidad de que durante el verano se presenten temperaturas entre 21°C y 25°C?

Para resolver este problema, se procede a tipificar los valores 21°C y 25°C para obtener los valores Z respectivos:

$$\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{21°C - 19.3°C}{5°C} = \frac{1.7°C}{5°C} = 0.34}$$

$$\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{25°C - 19.3°C}{5°C} = \frac{5.7°C}{5°C} = 1.14}$$

Procedemos a buscar los valores de probabilidad Z en las tablas, de donde se obtiene que:

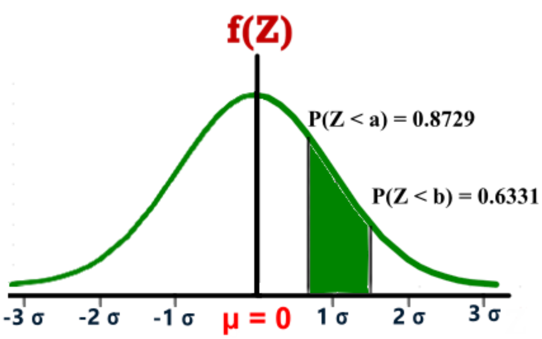
P(Z<0.34) = 0.6331

P(Z<1.14) = 0.8729

Se procede a realizar la diferencia entre el valor más alto y el valor más bajo:

P(a < Z < b) = P(Z < b) – P(Z < a)

P(a < Z < b) = 0.8729 – 0.6331 = 0.2398

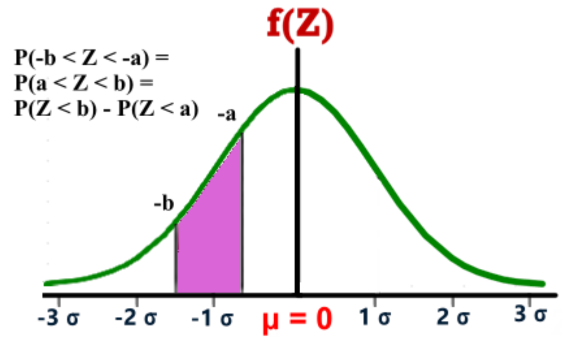


P(a < Z < b) = 0.87299 - 0.6331 = 0.2398

Por lo tanto, la probabilidad de ocurrencia de temperaturas durante el verano entre 21°C y 25°C es de 0.2398, o bien 23.98%.

e) La probabilidad de ocurrencia de un valor de la variable de interés entre dos valores de referencia negativos.

En este caso, se busca la probabilidad de ocurrencia de un valor entre dos valores de referencia negativos (menores que la media), la determinación de esta probabilidad está dada por



Ejemplo 5:

Retomando el mismo problema, ¿cuál es la probabilidad de que durante el verano se presenten temperaturas entre 16°C y 18°C?

Para resolver este problema, se procede a tipificar los valores 21°C y 25°C para obtener los valores Z respectivos:

$$\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{16°C - 19.3°C}{5°C} = \frac{-3.3°C}{5°C} = -0.66}$$

$$\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{18°C - 19.3°C}{5°C} = \frac{-1.3°C}{5°C} = -0.26}$$

Procedemos a buscar los valores de probabilidad Z en las tablas, de donde se obtiene que:

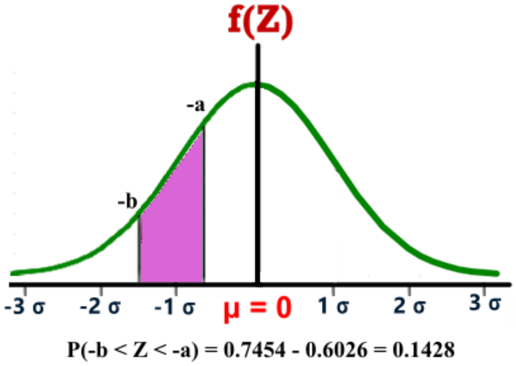
P(Z<0.66) = 0.7454

P(Z<0.26) = 0.6026

Se procede a realizar la diferencia entre el valor más alto y el valor más bajo:

P(a < Z < b) = P(Z < b) – P(Z < a)

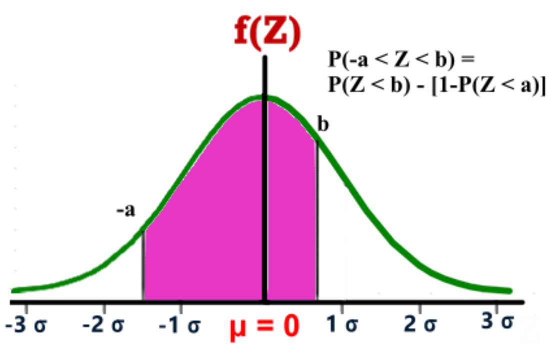
P(a < Z < b) = 0.7454 – 0.6026 = 0.1428



Por lo tanto, la probabilidad de ocurrencia de temperaturas durante el verano entre 16°C y 18°C es de 0.1428, o bien 14.28%.

f) La probabilidad de ocurrencia de un valor de la variable de interés entre un valor de referencia negativo y uno positivo.

En este caso, se determina la probabilidad de ocurrencia de un valor entre un valor de referencia menor que la media (Z negativo) y un valor de referencia mayor que la media (Z positivo). El cálculo está dado por:



En este ejemplo, se debe determinar la probabilidad de ocurrencia de temperaturas entre 17.5°C (valor menor que la media de 19.3°C) y 22°C (valor mayor que la media). Tomando en cuenta m=19.3°C y s=5°C, procedemos a tipificar los valores de -a=17.5°C y b=22°C.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{17.5°C - 19.3°C}{5°C} = \frac{-1.8°C}{5°C} = -0.36$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{22°C - 19.3°C}{5°C} = \frac{2.7°C}{5°C} = 0.54$$

Procedemos a buscar los valores de probabilidad Z en las tablas, de donde se obtiene que:

P(Z<0.36) = 0.6406

P(Z<0.54) = 0.7054

Se procede a realizar la diferencia entre el valor más alto y el complemento del valor más bajo:

P(-a < Z < b) = P(Z < b) – [1-P(Z < a)]

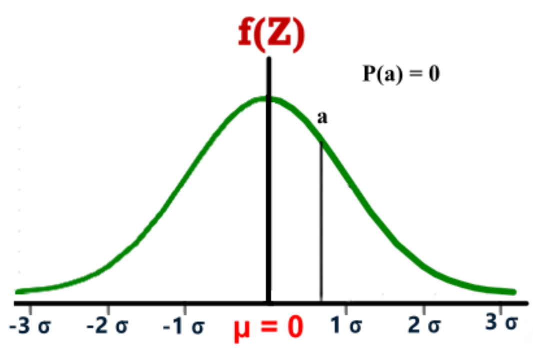
P(-a < Z < b) = 0.7054 – [1-0.6406] = 0.7054 – 0.3594

P(-a < Z < b) = 0.3460

Por lo tanto, la probabilidad de ocurrencia de temperaturas entre 17.5°C y 22°C es de 0.3460, o bien 34.60%

g) La probabilidad de ocurrencia de un valor específico de la variable de interés (un solo punto).

Siguiendo esta misma lógica, ¿cuál sería la probabilidad de ocurrencia de una temperatura durante verano exactamente igual a 23°C?



La respuesta directa sería cero (0), debido a que se trata de un solo punto en la gráfica, lo que corresponde a una única línea recta en un punto de la curva y, por lo tanto, el área definida por una línea recta es igual a cero.

Si se requiriera estimar la probabilidad en un punto determinado de la distribución, es posible optar por un rango de valores cercanos para obtener, no la probabilidad de un punto, sino la probabilidad de ocurrencia de un valor en un rango muy estrecho. Por ejemplo, si se desea determinar la probabilidad de temperaturas cercanas a 23°C, pueden definirse a=22.9°C y b=23.1°C, con lo que sería posible calcular la probabilidad de ocurrencia de una temperatura entre 22.9°C y 23.1°C, pero la probabilidad de ocurrencia de un punto específico será siempre de cero (0) en una distribución normal.

Resolvamos este ejemplo considerando el caso expuesto en el inciso d) "La probabilidad de ocurrencia de un valor de la variable de interés entre dos valores de referencia positivos" de esta entrega.

Tipificando 22.9°C y 23.1°C tenemos:

$$\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{22.9°C - 19.3°C}{5°C} = \frac{3.6°C}{5°C} = 0.72}$$

$$\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{23.1°C - 19.3°C}{5°C} = \frac{3.8°C}{5°C} = 0.76}$$

Procedemos a buscar los valores de probabilidad Z en las tablas, de donde se obtiene que:

P(Z<0.72) = 0.7642

P(Z<0.76) = 0.7764

Se procede a realizar la diferencia entre el valor más alto y el valor más bajo:

P(a < Z < b) = P(Z < b) – P(Z < a)

P(a < Z < b) = 0.7764 – 0.7642 = 0.0122

Por lo tanto, la probabilidad de tener una temperatura muy cercana a 23°C (entre 22.9°C y 23.1°C) sería de 0.0122, o bien 1.22%.

Con el fin de aplicar los casos abordados en el presente documento, resolvamos algunos ejercicios. Para facilitar el seguimiento de esta tarea, se anexa al final la tabla acumulativa de la distribución normal estándar.

Ejercicio 1:

Supongamos que la edad de inicio de la escarlatina tiene una distribución aproximadamente normal, con una media de 10 años y una desviación estándar de 2.5 años. Un niño contrae recientemente la enfermedad. Cuál es la probabilidad de que la edad del niño sea:

1) Entre 9 y 12 años
2) Más de 11 años
3) Menos de 12 años
4) Entre 12 y 15 años

Para resolver este problema, abordemos cada inciso e identifiquemos el caso del que se trata.

1) Entre 9 y 12 años.

En este inciso, tenemos que localizar el valor de probabilidad entre dos puntos, si consideramos que la media es de 10 años, se podrá identificar que uno de los valores es menor que la media (9 años) y uno mayor que la media (12 años), por lo que estaríamos en el caso del inciso ***f) "La probabilidad de ocurrencia de un valor de la variable de interés entre un valor de referencia negativo y uno positivo."***

Una vez identificado el caso, se procede a resolver el problema:

Paso 1: Tipificar los valores 9 años y 12 años.

$$\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{9-10}{2.5} = \frac{-1}{2.5} = -0.40}$$

$$\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{12-10}{2.5} = \frac{2}{2.5} = 0.80}$$

Paso 2

Procedemos a buscar los valores de probabilidad Z en las tablas, de donde se obtiene que:

P(Z<0.40) = 0.6554

P(Z<0.80) = 0.7881

Paso 3: A continuación resolvemos la ecuación:

P(-a < Z < b) = P(Z < b) – [1 - P(Z < a)]

Dónde:

P(Z < a) = 0.6554

P(Z < b) = 0.7881

Sustituyendo en la ecuación:

P(-a < Z < b) = 0.7881 – [1-0.6554] = 0.7054 – 0.3446

P(-a < Z < b) = 0.3608

Por lo tanto, la probabilidad de que el niño enfermo tenga entre 9 y 12 años es del 36.08%.

2) **Más de 11 años**

En este caso, debemos determinar la probabilidad de un valor mayor que la media, lo que corresponde al caso descrito en el inciso ***b) "La probabilidad de ocurrencia de un valor positivo mayor que el valor de interés.",*** ya que el valor de referencia de 11 años es mayor que la media, por lo que el valor Z obtenido será un valor positivo.

Paso 1: Tipificar el valor 11 años

$$\boldsymbol{Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{11 - 10}{2.5} = \frac{1}{2.5} = 0.40}$$

Paso 2: se determina el valor de probabilidad Z:

P(Z<0.40) = 0.6554

Paso 3: Se resuelve la ecuación:

P(Z>x) = 1-P(Z<x)

Sustituyendo **P(Z<0.40) = 0.6554** en la ecuación, se tiene:

P(Z>0.40) = 1 – 0.6554

P(Z>0.40) = 0.3446

Por lo tanto, la probabilidad de que el niño enfermo sea mayor de 11 años es del 34.46%

3) **Menos de 12 años**

Este ejercicio corresponde a la determinación de la probabilidad de un valor inferior al valor de referencia, que fue abordado en el inciso a) "La probabilidad de ocurrencia de valores inferiores al valor de interés (x)", dado que el valor de refrencia en este caso es 12 años y este es mayor que la medio (10 años).

Paso 1: Tipificar el valor 12 años

$$\boldsymbol{Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 10}{2.5} = \frac{2}{2.5} = 0.80}$$

Paso 2: Determinar el valor de probabilidad en la tabla, de donde se obtiene:

P(Z<0.80) = 0.7881

Como la tabla proporciona el valor de probabilidad de valores que son positivos, la respuesta a este problema es directa; la probabilidad de que la edad de un niño enfermo sea de 12 años o menos es del 78.81%.

4) **Entre 12 y 15 años**

Este ejercicio solicita el c´palculo de probabilidad entre dos valores mayores que ñla media, lo que corresponde al inciso d) "La probabilidad de ocurrencia de un valor de la variable de interés entre dos valores de referencia positivos."

Paso 1: Tipificar los valores 12 y 15 años

$$\boldsymbol{Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 10}{2.5} = \frac{2}{2.5} = 0.8}$$

$$\boldsymbol{Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{15 - 10}{2.5} = \frac{5}{2.5} = 2}$$

Procedemos a buscar los valores de probabilidad Z en las tablas, de donde se obtiene que:

P(Z<0.8) = 0.7881

$P(Z<2) = 0.9772$

Se procede a realizar la diferencia entre el valor más alto y el valor más bajo:

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = 0.9772 - 0.7881 = 0.1891$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el niño enfermo tenga una edad entre 12 y 15 años es de 18.91%

Ejercicios recomendados:

1) La estatura de mujeres adultas en cierta región tiene una distribución normal cuya media es de 160 cm, con desviación estándar de 7 cm. ¿Qué probabilidad existe de que una mujer tenga una estatura entre 155 y 170 cm?
2) Un estudio sobre colesterol en sangre en población universitaria, concluye que la distribución de lecturas del colesterol sigue una distribución normal, con media de 190 mg/dl y una desviación estándar de 25 mg/dl.
   a. ¿Qué porcentaje de esta población tendrá lecturas mayores a 250 mg/dl de colesterol?
   b. ¿Qué porcentaje tendrá lecturas inferiores a 190.05 mg/dl?
3) El peso corporal de los estudiantes de posgrado de una universidad está normalmente distribuido con una media de 65 kg y desviación estándar de 7 kg. Determine el porcentaje de estudiantes cuyo peso es mayor de 80 kg.
4) El consumo diario de agua en una muestra de 200 pacientes se distribuye de forma normal, con una media de 1,950 ml y una desviación estándar de 250 ml.
   a. ¿Cuántos pacientes se espera que tengan un consumo de agua mayor de 2,000 ml?
   b. ¿Cuántos pacientes se espera que consuman menos del promedio de la muestra?

En un estudio sobre la dieta en la que participaron 1,200 de hombres adultos se observa que el consumo de carebohidratos se duistribuye en forma normal, con una media de 248 g al día y una desviación estándar de 55 g. Si la cantidad recomendada es de entre 210 y 350 g al día ¿Qué porcentaje de los hombres participantes en el estudio consumen las cantidades recomendadas? ¿Cuántos consumen menos de las cantidades recomendadas? ¿Cuántos consumen carbohidratos en exceso?

Próxima entrega: Distribuciones de probabilidad III: Distribución normal y cálculo de tamaños de muestra.

Referencias:

Departamento de Didáctica de la Matemática. (2011). Estadística con proyectos. (C. Batanero, & C. Díaz, Eds.) Granada, España: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

García Pérez, A. (2008). Estadística aplicada: conceptos básicos (2a edición ed.). Madrid, España: Educación permanente / Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Pértegas Díaz, S., & Pita Fernández, S. (2001). La distribución normal. Cad Aten Primaria, 8, 268-274.

Baird, D. C. (1991). Experimentación: una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos. Mexico. DF: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Dagnino S. (2014). Propiedades matemáticas de la distribución normal o de Gauss. Rev. Chil. Anest. Vol. 43 Número 2 pp. 116-121 https://doi.org/10.25237/revchilanestv43n02.08

Declaración de conflicto de intereses

Los autores de este artículo expresan que no tuvieron ningún conflicto de intereses durante la preparación de este documento ni para su publicación.

Tabla de Distribución Normal Standard = Áreas bajo la Curva Normal

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Fuente: https://es.slideshare.net/slideshow/uso-de-la-tabla-de-distribucion-de-probabilidad-normal-estandar/25392010